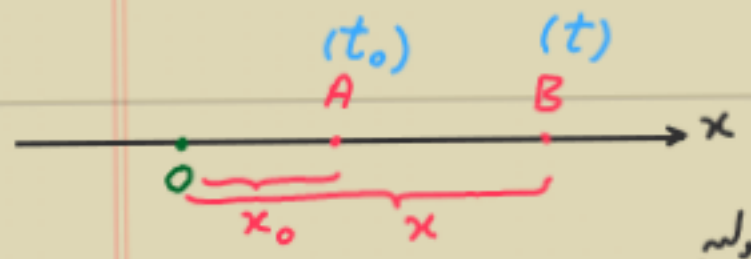
بنام خدا

فصل سوم : حرکت روی خط راست .

مکان یک ذره در دستگاه مختصات

جابجایی یعنی تغییر مکان .



x_0 مکان اولیه
x مکان ثانوی
$\}\longrightarrow$ جابجایی $\Delta x = x - x_0$ (برحسب متر m)

t_0 زمان اولیه
t زمان ثانوی
$\}\longrightarrow$ مدت زمان $\Delta t = t - t_0$ (برحسب ثانیه s)

تعریف: سرعت متوسط $= \dfrac{\text{جابجایی}}{\text{مدت زمان}} \longrightarrow \overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$ $\left(\frac{m}{s}\right)$

$t_0 = 0 \longrightarrow \overline{v} = \dfrac{x - x_0}{t} \longrightarrow x - x_0 = \overline{v}\, t$ معادله اصلی حرکت

سرعت لحظه ای $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \longrightarrow v = \dfrac{dx}{dt}$

$\begin{cases} \text{if } \overline{v} = v \longrightarrow \text{حرکت با سرعت ثابت} \longrightarrow x - x_0 = v t \text{ معادله مکان-زمان} \\ \text{if } \overline{v} \neq v \longrightarrow \text{حرکت با سرعت متغیر} \longrightarrow \begin{cases} v_0 \text{ سرعت اولیه} \\ v \text{ سرعت ثانوی} \end{cases} \longrightarrow \text{تغییر سرعت } \Delta v = v - v_0 \end{cases}$

تعریف: شتاب متوسط $= \dfrac{\text{تغییر سرعت}}{\text{مدت زمان}} \longrightarrow \overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t - t_0}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

شتاب لحظه ای $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \longrightarrow a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\begin{cases} \text{if } \overline{a} = a \longrightarrow \text{حرکت با شتاب ثابت} \\ \text{if } \overline{a} \neq a \longrightarrow \text{حرکت با شتاب متغیر} \end{cases}$

برای حرکت با شتاب ثابت ، معادلات حرکت به صورت زیر است :

$a = \dfrac{v - v_0}{t} \longrightarrow v - v_0 = at$ معادله سرعت زمان

برای شتاب ثابت $\overline{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$ $\xrightarrow[\text{حرکت}]{\text{از معادله اصلی}}$ $x - x_0 = \dfrac{v + v_0}{2} t$ معادله مستقل از شتاب

حذف v از معادلات $x - x_0 = \dfrac{1}{2} a t^2 + v_0 t$ معادله مکان-زمان

معادله مستقل از زمان $x-x_0=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)\left(\frac{v-v_0}{a}\right) \rightarrow v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$ حذف t از معادلات

برای حالتی که شتاب ثابت نیست، از تعریف $\bar{v}$ استفاده می‌کنیم.

مثال: معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $x=2t^3+3t-4$ است. مطلوبست:

الف) سرعت متحرک در ثانیه سوم حرکت.

ب) سرعت متحرک در $t=3s$.

ج) شتاب متحرک در ۲ ثانیه اول.

د) شتاب متحرک در $t=2s$.

حل: الف) در ثانیه سوم یعنی در بازه زمانی از $t_1=2s$ تا $t_2=3s$. پس سرعت متوسط است:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{\{2(3)^3+3(3)-4\}-\{2(2)^3+3(2)-4\}}{3-2}=41\ m/s$$

ب) در $t=3s$ یعنی در لحظه ۳ ثانیه، پس سرعت لحظه‌ای است.

$$v=\frac{dx}{dt} \rightarrow v=6t^2+3 \longrightarrow v_{(t=3s)}=6(3)^2+3=57\ m/s$$

ج) دو ثانیه اول یعنی از $t_0=0$ تا $t=2s$، پس شتاب متوسط است:

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \longrightarrow \bar{a}=\frac{\{6(2)^2+3\}-\{6(0)^2+3\}}{2-0} \Rightarrow \bar{a}=12\ m/s^2$$

د) در لحظه $t=2s$ باید شتاب لحظه‌ای محاسبه شود:

$$a=\frac{dv}{dt} \rightarrow a=12t \Rightarrow a_{(t=2s)}=12(2)=24\ m/s^2$$

مثال: متحرکی از حال سکون شروع به حرکت کرده و در مدت ۴ ثانیه، مسافت ۳۵ m را طی می‌کند. پس سرعت آن ثابت شده و به مدت ۸ ثانیه با سرعت ثابت حرکت می‌کند و پس از آن با آهنگ $2\ m/s^2$ متوقف می‌شود. مطلوبست:

الف) شتاب متحرک در مرحله اول.

ب) سرعت متحرک در مرحله دوم.

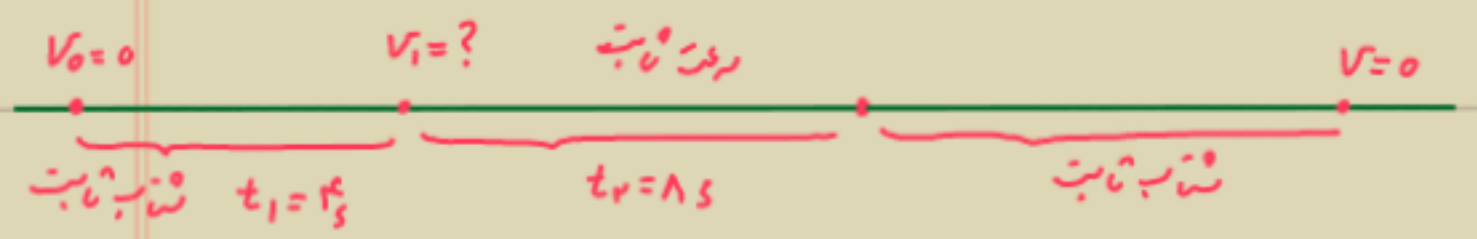
ج) مسافت طی شده در مرحله دوم.

د) زمان در مرحله سوم.

هـ) مسافت طی شده در مرحله سوم.

و) سرعت متوسط متحرک در کل حرکت.

حل: کافیست معادلات حرکت را به خوبی حفظ بوده و معلوم و مجهول در هر قسمت را تشخیص دهیم.



الف) $\Delta x_1 = 30\ m\ ,\ t_1 = 4\ s\ ,\ V_0 = 0 \rightarrow a_1 = ?$

معادله مکان زمان $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \rightarrow 30 = \frac{1}{2}a_1(4)^2 + 0 \longrightarrow a_1 = 3{,}75\ m/s^2$

(ب) $V_1 = ?$ انتهای مرحله اول $V_1 - V_0 = a_1 t_1 \rightarrow V_1 - 0 = (3{,}75)(4) = 15\ m/s$

(ج) $\Delta x_2 = ?$ سرعت ثابت $\Delta x = Vt \longrightarrow \Delta x_2 = V_1 t_2 = 15(8) = 120\ m$

(د) $t_3 = ?$ سرعت زمان $V - V_1 = a\,t_3 \rightarrow 0 - 15 = -2\,t_3 \rightarrow t_3 = 7{,}5\ s$

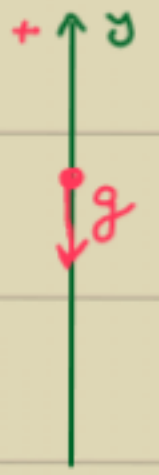
(هـ) $\Delta x_3 = ?$ مستقل از زمان $\Delta x_3 = \frac{V + V_1}{2} t_3 \longrightarrow \Delta x_3 = (\frac{0+15}{2})(7{,}5) = 56{,}25\ m$

(و) $\overline{V} = ?$ تعریف $\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{30 + 120 + 56{,}25}{4 + 8 + 7{,}5} = \frac{206{,}25}{19{,}5} = 10{,}57\ m/s$

حرکت سقوط آزاد :

در شرایط خلاء (بدون مقاومت هوا) ، اگر جسم در راستای قائم و تحت تاثیر گرانش (جاذبه زمین) حرکت کند ، حرکت روی خط مستقیم و با شتاب ثابت گرانش (g) است . بنابراین از معادلات حرکت با شتاب ثابت پیروی می کند . با جایگزینی محور y به جای محور x و شتاب g به جای a می توان معادلات را بازنویسی کرد :

اگر برای محور y ها سمت بالا مثبت فرض شود ، g همواره به طرف پائین بوده و علامت منفی خواهد داشت :



معادله مکان زمان $y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$

معادله سرعت زمان $V - V_0 = -gt$

معادله مستقل از زمان $V^2 - V_0^2 = -2g(y - y_0)$

برخی از شرایط مسئله را باید بتوان تشخیص داد . مثلاً شرط برخورد به زمین $y = 0$

جسم از ارتفاع h پرتاب شده $y_0 = h$ ، شرط رسیدن به اوج $V = 0$

جسم به ارتفاع h رسیده $y = h$ ، جسم رها شده $V_0 = 0$ ، ....

مثال : از ارتفاع ۸۰ متری ، گلوله ای با سرعت $40\ m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می شود . مطلوبست :

الف) حداکثر ارتفاعی که جسم به آن می رسد (ارتفاع اوج) .

ب) زمان رسیدن به اوج ، ج) مدت زمانی که طول می‌کشد تا گلوله به زمین برخورد کند.

د) سرعت گلوله درلحظه برخورد به زمین .

حل: شتاب گرانش درهرنقطه از زمین مثبت است و به طور میانگین $g=9,8\ m/s^2$ ولی برای سادگی در حل مسائل $g=10\ m/s^2$ درنظر گرفته می‌شود.

$y_0=80m$, $v_0=60\ m/s$, $g=10\ m/s^2$

الف) اوج $y_{max}=?$ سرعت در اوج $v=0$ ← مستقل از زمان $v^2-v_0^2=-2g(y-y_0)$

$$0-(60)^2=-2(10)(y_{max}-80) \rightarrow y_{max}=260\ m$$

ب) $t_1=?$ اوج سرعت زمان $v-v_0=-gt \rightarrow 0-60=-10\,t_1 \rightarrow t_1=6s$

ج) $t=?$ کل شرط برخورد به زمین $y=0$ ؛ مکان زمان $y-y_0=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$

$$0-80=-\frac{1}{2}(10)t^2+60t \rightarrow 5t^2-60t-80=0 \rightarrow t^2-12t-16=0$$

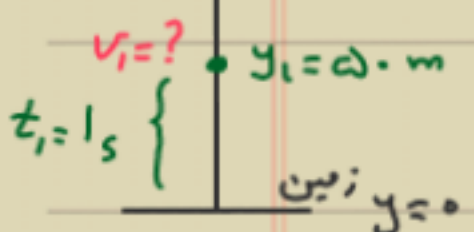
$$t=\frac{12\pm\sqrt{144+64}}{2} \rightarrow \begin{cases} t=13,2\ s \\ t=-1,21\ s \times \text{غ ق ق} \end{cases}$$

د) $v=?$ سرعت زمان $v-v_0=-gt \rightarrow v-60=-10(13,2) \rightarrow v=-72\ m/s$

علامت منفی، نشانه جهت رو به پایین برای سرعت است.

مثال: از ارتفاع h گلوله‌ای رها شده و ۵۰ متر انتهای مسیر را در ۱ ثانیه طی می‌کند (تا به زمین برسد).

ارتفاع h چقدر است؟



حل: $y-y_1=-\frac{1}{2}gt_1^2+v_1t_1$ مکان زمان برای انتهای مسیر

$$0-50=-\frac{1}{2}(10)(1)^2+v_1(1) \rightarrow v_1=-45\ m/s$$

مستقل از زمان $v_1^2-v_0^2=-2g(y_1-y_0) \rightarrow (-45)^2-0=-2(10)(50-h)$

$$2025=-20(50-h) \rightarrow 50-h=-101,25 \rightarrow h=151,25\ m$$